Предположим, что все студенты составили
еньше 5 задач и рассмотрим случай с мак-
мальным количеством задач:
студент - 1 задача
студ. - 2 задачи
студ - 3 задачи
студ - 4 задачи
$2+3+7\cdot 4 = 34$ задачи в сумме. Но по условию
ставлено 35 задач. Противоречие. Значит хотя
1 студент составил не менее 5 задач.

№4

оспользуемся методом индукции.
сть неравенство верно для n. Докажем, что оно
но и для $k=n+1$.

$$\ldots + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$ (изначально)

$$\ldots + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$ (получилось при $k=n+1$)

$$\ldots + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} =$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2-2n-1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{2}$$

ким образом мы доказали, что

$$\ldots + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} \text{ при } n>1$$

№7

Пусть Али-Баба взял x кг золота и y кг алмазов

Составим 2 уравнения:

1) Так как 1 кг золота занимает $\frac{1}{200}$ сундука, а 1 кг алмазов $\frac{1}{40}$, то $\frac{x}{200}+\frac{y}{40}=1$ (1 полный сундук)

$\frac{x+5y}{200}=1$

$x+5y=200$

2) Чтобы сумма денег была максимальной, мы считаем что Али-Баба полностью заполнил сундук и взял 100 кг драгоценностей.

$x+y=100$ (кг всего)

$\begin{cases} x+5y=200 \\ x+y=100 \end{cases}$

$4y=100 \Leftrightarrow y=25$ и $x=100-25 \Leftrightarrow x=75$

3) Нам надо найти $20\cdot x+60y$

$20\cdot75+60\cdot25=1500+1500=3000$ динаров

Ответ: 3000 динаров.

+

№2

Из данного условия следует, что число делится на 9 и на 3, но не обязательно на 27.

Например число 9945

$9+9+4+5=27 \vdots 27$

но $9945:27=368$ (ост. 9)

Значит Петя не прав.

Ответ: нет

+

…пишла 11:30 пришла 11:35

№ 1

$\ldots - n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$

$\ldots 0 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$\ldots 1; n; n+1$ – последовательные числа. Значит одно из …х точно кратно 3

…ри n-нечетном одно из $n-1$; $n+1$ кратно 2, другое …атно 4, значит $(n-1)\cdot(n+1) \vdots 8$

…ри n-четном $n-1$ и $n+1$ не кратны ~~8~~ 2

~~кратно 5 (по теореме Ферма)~~

$\ldots \equiv 1 \pmod 5) \Rightarrow n^4 - 1 \equiv 0 \pmod 5$ по теореме Ферма

…начит $n^4 - 1 \vdots 5$.

…олучаем 2 случая:

$n = 2k+1$

$n = 8k$

…твет: $n = 2k+1$; $n = 8k$.

+

№ 10

Так как $KL \parallel AC$, то $\smile AK = \smile CL$. Равные дуги соедин… равные отрезки $\Rightarrow AK = CL$

~~$\angle KBC = \frac{1}{2} \smile KC = \frac{1}{2}(\smile AK + \smile AC)$~~ $\Rightarrow \angle KBC = \angle ABL \Rightarrow$

~~$\angle ABL = \frac{1}{2} \smile AL = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile CL)$~~ $\Rightarrow \angle KBA = \angle CBL$

Так как $\smile AK = \smile CL$, то $\angle KBA = \angle CBL$

Центр вписанной окружности лежит на точке пере…сечении биссектрис

−

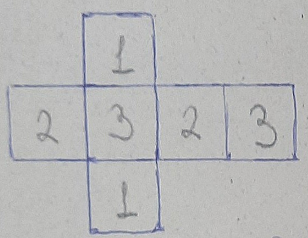
№8

Спортсмен сделал 12 выстрелов, так как по усло
он сделал больше 11, а при 13 выстрелах мини
кая сумма очков $8 \cdot 13 = 104$, что уже больше 100
Если учитывать условие, что он хотя бы 1 раз попа
8, 9 и 10 очков, то есть единственный вариант попада
Это 9 выстрелов по 8 очков, 2 выстрела по 9 и 1 по 10
(в сумме $9 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 10 = 100$)

Ответ: 12 выстрелов: 9 по 8 очков, 2 по 9 очков, 1 по 10 о

№6

развертка кубика



Всего вариантов раскрашивания развертки 6!
Но из-за противоположных граней (отмечены на р
нке одинаковыми цифрами) мы посчитали одинак в вариантах
вые кубики. Поэтому нужно 6! разделить на 2!·2!
(так как 3 пары граней противоположных)

$$\frac{6!}{2!\,2!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 2} = 90 \text{ вариантов}$$

Ответ: 90

№5

Приведем пример ~~такой~~ ситуации, когда тако
возможно. Пусть на балу 4 девушки. Расставим

4 3 2 1 < красота (4 - самая красивая)
2 3 1 4 < ум (4 - самая умная)

Если мужчины будут менять партнерш как пок
зано на рисунке стрелками, то каждый раз
после $\binom{2}{1}$ будет девушка $\binom{3}{3}$ более умная и красивая

Ответ: могло